ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
Ατρείδης Βασίλης

ΘΕΜΑ Δ

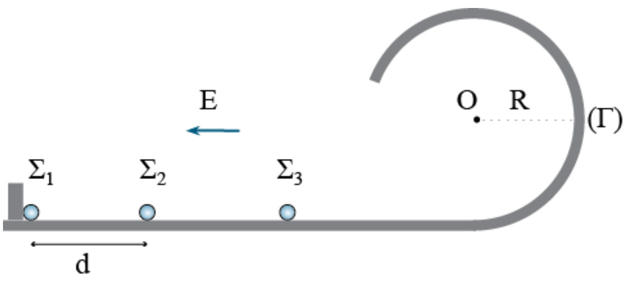
Πάνω σε λείο οριζόντιο μονωτικό επίπεδο συγκρατούνται ακίνητα σε απόσταση d=9cm δυο σημειακά ηλεκτρικά φορτία Σ$_1$ και Σ$_2$. Το Σ$_1$ έχει φορτίο $q_1 = 36\cdot 10^{-10}\,C$, είναι ακλόνητα στερεωμένο στο δάπεδο ενώ το Σ$_2$ έχει μάζα $m = 2\cdot 10^{-7}\,Kg$, φορτίο $q_2 = 4\cdot 10^{-8}\,C$ και μπορεί να κινηθεί αν αφεθεί ελεύθερο. Στον χώρο υπάρχει ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης E=1000N/C με κατεύθυνση αυτήν που φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή t$_o$=0 αφήνουμε το φορτίο Σ$_2$ ελεύθερο να κινηθεί. Τη χρονική στιγμή που αυτό αποκτά μέγιστη ταχύτητα, συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με μια σημειακή μονωτική σφαίρα Σ$_3$ μάζας $m = 2\cdot 10^{-7}\,Kg$, η οποία ήταν ακίνητη στο οριζόντιο επίπεδο. Μετά την κρούση η σφαίρα Σ$_3$ κινείται στο εσωτερικό λείας κυκλικής τροχιάς ακτίνας R=1m.

Δ1. Να υπολογίσετε την αρχική δυναμική ενέργεια των φορτίων Σ$_1$ και Σ$_2$.

Δ2. Να υπολογίσετε τη μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει το φορτίο Σ$_2$.

Δ3. Να υπολογίσετε την αντίδραση που δέχεται από την κυκλική τροχιά το σωματίδιο Σ$_3$ όταν έχει διαγράψει ένα τεταρτοκύκλιο, βρίσκεται δηλαδή στο σημείο Γ.

Δ4. **i.** Να εξετάσετε αν η σφαίρα Σ$_3$ θα μπορέσει να κάνει ανακύκλωση στην κυκλική τροχιά.
ii. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σημειακού φορτίου Σ$_2$ αμέσως μετά την κρούση και να εξηγήσετε το είδος της κίνησης που θα κάνει.



Δίνονται $K = 9\cdot 10^{9}\,\dfrac{Nm^2}{C^2}$, $g = 10\,\dfrac{m}{s^2}$
Τριβές δεν υπάρχουν.

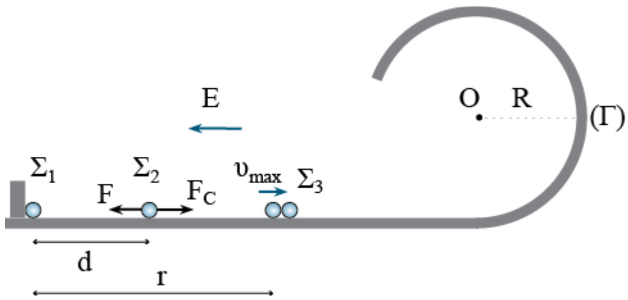
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. Η αρχική δυναμική ενέργεια των φορτίων Σ$_1$ και Σ$_2$ είναι:

$$U_{αρχ} = K\frac{q_1q_2}{d} = 9\cdot 10^{9}\,\frac{36\cdot 10^{-10}\,4\cdot 10^{-8}}{9\cdot 10^{-2}} = 144\cdot 10^{-7}\,J$$

Δ2. Το φορτίο Σ$_2$ θα αποκτήσει μέγιστη ταχύτητα όταν η δύναμη Coulomb θα γίνει ίση με τη δύναμη που ασκεί το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο στο φορτίο Σ$_2$.

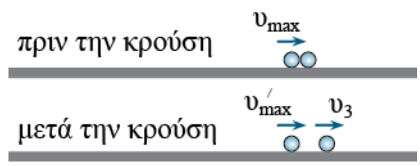
$$F_C = F \Rightarrow K_C\frac{q_1q_2}{r^2} = Eq_2 \Rightarrow K_C\frac{q_1}{r^2} = E \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{K_Cq_1}{E}} \Rightarrow\Rightarrow r = \sqrt{\frac{9\cdot 10^{9}\cdot 36\cdot 10^{-10}}{1000}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r = \sqrt{324\cdot 10^{-4}} = 18\cdot 10^{-2}\,m$$



Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για το φορτίο Σ$_2$ από την αρχική μέχρι την τελική θέση. Η δύναμη Coulomb είναι μεταβλητή, επομένως το έργο της θα υπολογιστεί σαν μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του σημειακού φορτίου q$_2$.

$$ΣW = ΔK \Rightarrow W_{F_C} + W_F = K_{τελ} - K_{αρχ} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow U_{αρχ} - U_{τελ} - F(r-d) = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow K\frac{q_1q_2}{d} - K\frac{q_1q_2}{r} - Eq_2(r-d) = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 144\cdot 10^{-7} - 72\cdot 10^{-7} - 36\cdot 10^{-7} = 1\cdot 10^{-7}\,\upsilon_{max}^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 36\cdot 10^{-7} = 10^{-7}\,\upsilon_{max}^2 \Rightarrow \upsilon_{max} = 6\,m/s$$

Δ3. Εφαρμόζουμε διατήρηση της ορμής και της κινητικής ενέργειας στην ελαστική κρούση.



$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow m\upsilon_{max} = m\upsilon'_{max} + m\upsilon_3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \upsilon_{max} = \upsilon'_{max} + \upsilon_3 \Rightarrow \upsilon_{max} - \upsilon'_{max} = \upsilon_3 \quad (1)$$
$$K_{αρχ} = K_{τελ} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 = \frac{1}{2}m\upsilon'^2_{max} + \frac{1}{2}m\upsilon_3^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \upsilon_{max}^2 = \upsilon'^2_{max} + \upsilon_3^2 \Rightarrow \upsilon_{max}^2 - \upsilon'^2_{max} = \upsilon_3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\upsilon_{max} - \upsilon'_{max})(\upsilon_{max} + \upsilon'_{max}) = \upsilon_3^2 \quad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{(\upsilon_{max} - \upsilon'_{max})(\upsilon_{max} + \upsilon'_{max})}{(\upsilon_{max} - \upsilon'_{max})} = \frac{\upsilon_3^2}{\upsilon_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_{max} + \upsilon'_{max} = \upsilon_3 \quad (3)$$

Από τις (1) και (3) παίρνουμε:

$$\upsilon_{max} - \upsilon'_{max} = \upsilon_{max} + \upsilon'_{max} \Rightarrow 2\upsilon'_{max} = 0 \Rightarrow \upsilon'_{max} = 0$$

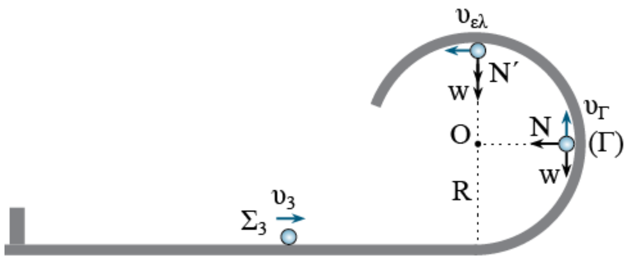
Και

$$\upsilon_{max} + \upsilon'_{max} = \upsilon_3 \Rightarrow \upsilon_3 = \upsilon_{max} = 6 m/s$$

Με διατήρηση μηχανικής ενέργειας υπολογίζουμε την ταχύτητα της σφαίρας στη θέση (Γ).

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_3^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_Γ^2 + mgR \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_3^2 = \upsilon_Γ^2 + 2gR \Rightarrow 6^2 = \upsilon_Γ^2 + 20 \Rightarrow \upsilon_Γ = 4 m/s$$



Και από τη συνθήκη της κεντρομόλου δύναμης παίρνουμε:

$$ΣF = F_κ \Rightarrow N = \frac{m\upsilon_Γ^2}{R} = \frac{2 \cdot 10^{-7} 4^2}{1} = 32 \cdot 10^{-7} N$$

Δ4. i. Για να κάνει ανακύκλωση η σφαίρα $Σ_3$ πρέπει στο ανώτερο σημείο της τροχιάς να έχει ελάχιστη ταχύτητα:

$$ΣF = F_κ \Rightarrow N' + mg = \frac{m\upsilon_{ελ}^2}{R} \xrightarrow{N'=0} mg = \frac{m\upsilon_{ελ}^2}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_{ελ} = \sqrt{gR} = \sqrt{10} m/s$$

Με διατήρηση μηχανικής ενέργειας υπολογίζουμε την ταχύτητα της σφαίρας στην ανώτερη θέση.

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K'_{τελ} + U'_{τελ} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_3^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_{αν}^2 + mg2R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_3^2 = \upsilon_{αν}^2 + 4gR \Rightarrow 6^2 = \upsilon_{αν}^2 + 40 \Rightarrow \upsilon_{αν}^2 = -4$$

Άρα η σφαίρα δεν φτάνει στην ανώτερη θέση και επομένως δεν κάνει ανακύκλωση.

ii. Στο σημείο της κρούσης η συνισταμένη δύναμη στο φορτίο $Σ_2$ είναι:

$$ΣF = F_C - F = K_C \frac{q_1 q_2}{r^2} - Eq_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ΣF = 9 \cdot 10^9 \frac{36 \cdot 10^{-10} 4 \cdot 10^{-8}}{(18 \cdot 10^{-2})^2} - 1000 \cdot 4 \cdot 10^{-8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ΣF = \frac{1296 \cdot 10^{-9}}{324 \cdot 10^{-4}} - 4 \cdot 10^{-5} = 0$$

Και

$$ΣF = mα \Rightarrow α = 0$$

Μετά την κρούση το φορτίο $Σ_2$ είναι ακίνητο. Επομένως θα συνεχίσει να ισορροπεί.