ΘΕΜΑ Δ

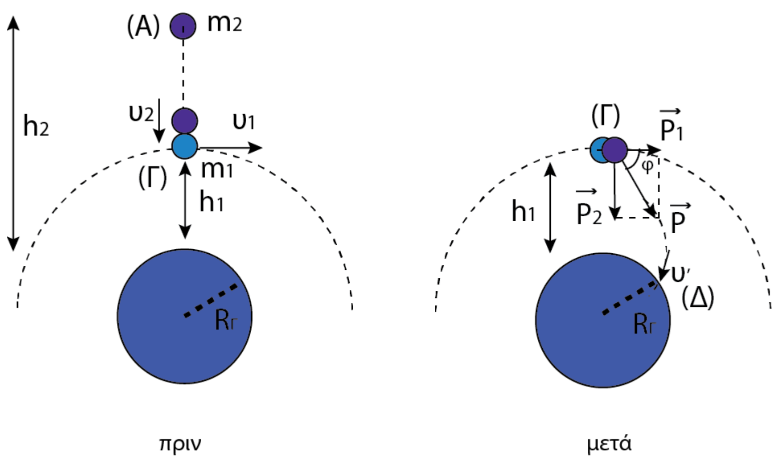
Δορυφόρος μάζας $m_1 = m$ κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη γη σε ύψος $h_1 = R_\Gamma$ από την επιφάνειά της. Σώμα μάζας $m_2 = \sqrt{3}m$ αφήνεται να πέσει ελεύθερα από ύψος $h_2 = 3R_\Gamma$ από την επιφάνεια της γης. Το σώμα συγκρούεται πλαστικά με το δορυφόρο και αποκτούν κοινή ταχύτητα.

Δ1. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Δ2. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας με την οποία φτάνει το συσσωμάτωμα στην επιφάνεια της γης.

Δ3. Το ποσοστό επί τοις εκατό της ενέργειας που έγινε θερμότητα κατά την κρούση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Δ1. Η ταχύτητα της κυκλικής κίνησης του δορυφόρου είναι:

$$F = F_\kappa \Rightarrow G\frac{M_\Gamma m}{(R_\Gamma + h_1)^2} = \frac{m \cdot \upsilon_1^2}{R_\Gamma + h_1} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h_1}} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{2R_\Gamma}} \quad (1)$$

$$\acute{o}\mu\omega\varsigma \;\; g_o = \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Rightarrow GM_\Gamma = g_o R_\Gamma^2 \;\; (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{g_o \cdot R_\Gamma^2}{2R_\Gamma}} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{g_o \cdot R_\Gamma}{2}} \quad (3)$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το σώμα και υπολογίζουμε την ταχύτητά του λίγο πριν συγκρουστεί με το δορυφόρο.

$$\mathrm{E}_{\mathrm{A}} = \mathrm{E}_{\Gamma} \Rightarrow \mathrm{K}_{\mathrm{A}} + U_{A} = \mathrm{K}_{\Gamma} + U_{\Gamma} \Rightarrow 0 + m_2 V = \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 + m_2 V' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 - G\frac{\mathrm{M}_{\Gamma} m_2}{4R_{\Gamma}} = \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 - G\frac{\mathrm{M}_{\Gamma} m_2}{2R_{\Gamma}} \xrightarrow{(2)} -\frac{g_o R_{\Gamma}^2}{4R_{\Gamma}} = \frac{\upsilon_2^2}{2} - \frac{g_o R_{\Gamma}^2}{2R_{\Gamma}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{g_o R_{\Gamma}}{4} + \frac{g_o R_{\Gamma}}{2} = \frac{\upsilon_2^2}{2} \Rightarrow \frac{\upsilon_2^2}{2} = \frac{g_o R_{\Gamma}}{4} \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{\frac{g_o R_{\Gamma}}{2}} \quad (4)$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής κατά την κρούση παίρνουμε:

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο παίρνουμε:

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \Rightarrow (m_1 + m_2)\upsilon = \sqrt{(m_1\upsilon_1)^2 + (m_2\upsilon_2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(m + \sqrt{3}m\right)\upsilon = \sqrt{m^2 \frac{g_o R_{\Gamma}}{2} + 3m^2 \frac{g_o R_{\Gamma}}{2}} \Rightarrow \left(m + \sqrt{3}m\right)\upsilon = \sqrt{4m^2 \frac{g_o R_{\Gamma}}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\left(1 + \sqrt{3}\right)\upsilon = m\sqrt{2 g_o R_{\Gamma}} \Rightarrow \upsilon = \frac{\sqrt{2 g_o R_{\Gamma}}}{1 + \sqrt{3}} \quad (5)$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{m_2\upsilon_2}{m_1\upsilon_1} = \frac{\sqrt{3}m\sqrt{\frac{g_o R_{\Gamma}}{2}}}{m\sqrt{\frac{g_o R_{\Gamma}}{2}}} = \sqrt{3}$$

Άρα $\theta = 60^o$

Δ2. Έστω ότι το συσσωμάτωμα θα φτάσει στην επιφάνεια της γης με ταχύτητα μέτρου υ'. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας στα σημεία (Γ) και (Δ).

$$E_\Gamma = E_\Delta \Rightarrow K_\Gamma + U_\Gamma = K_\Delta + U_\Delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2 + (m_1+m_2)V = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon'^2 + (m_1+m_2)V' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\upsilon^2}{2} - G\frac{M_\Gamma}{2R_\Gamma} = \frac{\upsilon'^2}{2} - G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma} \Rightarrow \upsilon^2 - G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma} = \upsilon'^2 - 2G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma} \xrightarrow{(2)}$$

$$\Rightarrow \upsilon^2 - \frac{g_o R_\Gamma^2}{R_\Gamma} = \upsilon'^2 - 2\frac{g_o R_\Gamma^2}{R_\Gamma} \Rightarrow \upsilon^2 - g_o R_\Gamma = \upsilon'^2 - 2g_o R_\Gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon'^2 = g_o R_\Gamma + \upsilon^2 \xrightarrow{(5)} \upsilon'^2 = g_o R_\Gamma + \frac{2g_o R_\Gamma}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon'^2 = g_o R_\Gamma\left[1 + \frac{2}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}\right] \Rightarrow \upsilon' = \sqrt{g_o R_\Gamma\left[1 + \frac{2}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}\right]} \quad (6)$$

Δ3. Το ποσοστό της ενέργειας που έγινε θερμότητα κατά την κρούση είναι:

$$\alpha = \frac{Q}{E_{\alpha\rho\chi}} = \frac{\Delta K}{E_{\alpha\rho\chi}} = \frac{K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi}}{K_{\alpha\rho\chi}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2 - \left(\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2\right)}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2} =$$

$$= \frac{\left(m+\sqrt{3}m\right)\frac{2g_o R_\Gamma}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2} - m\frac{g_o R_\Gamma}{2} - \sqrt{3}m\frac{g_o R_\Gamma}{2}}{m\frac{g_o R_\Gamma}{2} + \sqrt{3}m\frac{g_o R_\Gamma}{2}} =$$

$$= \frac{m\left(1+\sqrt{3}\right)\frac{2g_o R_\Gamma}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2} - m\frac{g_o R_\Gamma}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{m\frac{g_o R_\Gamma}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{2g_o R_\Gamma}{1+\sqrt{3}} - \frac{g_o R_\Gamma}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{\frac{g_o R_\Gamma}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)} = \frac{\frac{2}{1+\sqrt{3}} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{2}{1+\sqrt{3}}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} - 1 = \frac{4}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2} - 1 = -0,464 \rightarrow 46,4\%$$

Άρα το 46,4% της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος έγινε θερμότητα κατά την κρούση.