ΡΥΘΜΟΙ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ

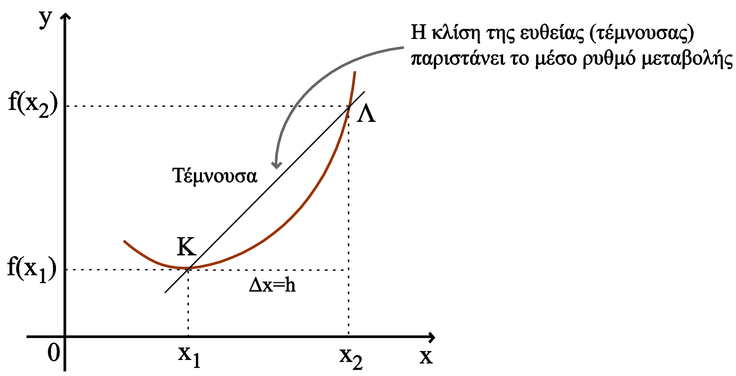
Επιμέλεια: Ατρείδης Γιώργος

• ΜΕΣΟΣ ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση y=f(x) η γραφική παράσταση της οποίας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 1. Στη συνάρτηση αυτή ο **μέσος ρυθμός μεταβολής** του y ως προς το x για ένα διάστημα $[x_1, x_2]$ εκφράζει το πηλίκο της μεταβολής Δy προς τη μεταβολή (μήκος) Δx και υπολογίζεται ως εξής.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \xrightarrow{x_2 - x_1 = h} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} \qquad \text{όπου } h \neq 0 \quad (1)$$

Από τα σημεία Κ και Λ διέρχεται μια τέμνουσα της γραφικής παράστασης C_f. Η κλίση της τέμνουσας αυτής ισούται με τον μέσο ρυθμό μεταβολής $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ της f στο διάστημα $[x_1, x_2]$, που ορίσαμε παραπάνω.



Σχήμα 1

***Άρα από γεωμετρική άποψη, ο μέσος ρυθμός μεταβολής είναι η κλίση (ή ο συντελεστής διεύθυνσης) μιας τέμνουσας ευθείας.**

• ΣΤΙΓΜΙΑΙΟΣ ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

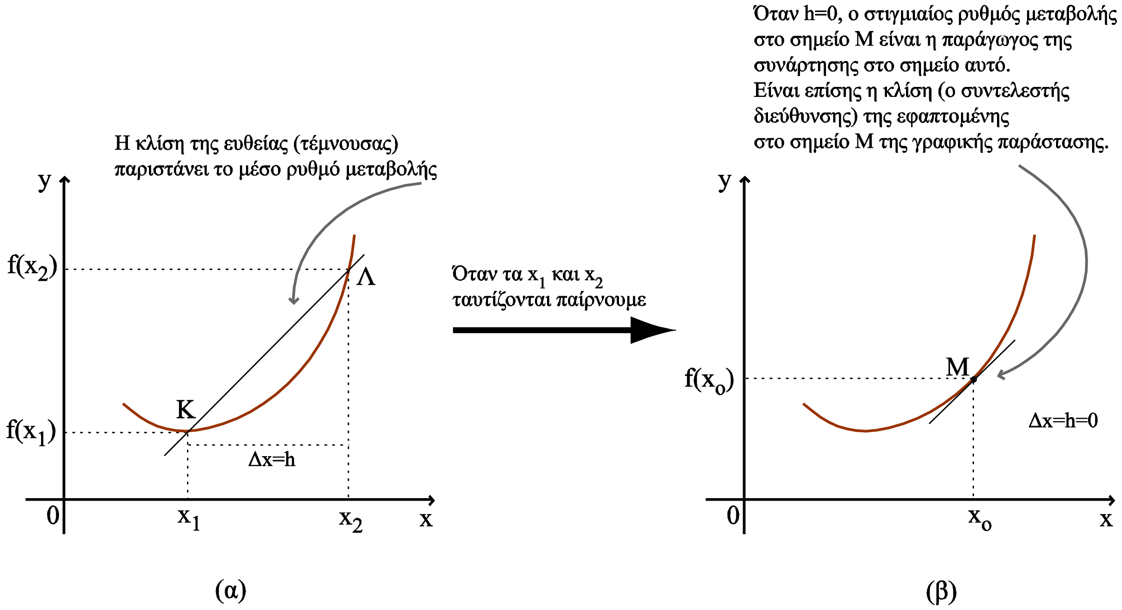
Έστω ότι στην προηγούμενη γραφική παράσταση τα x_1 και x_2 πλησιάζουν το ένα προς το άλλο και σε κάποιο σημείο ταυτίζονται $x_1 = x_2 = x_o$ (σχήμα 2). Τότε το μήκος Δx τείνει στο μηδέν $\Delta x = x_2 - x_1 = h = 0$.
Στην περίπτωση αυτή ο ρυθμός μεταβολής ονομάζεται **στιγμιαίος** και δεν μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση (1) αφού το κλάσμα δίνει $\frac{0}{0}$.
Στην περίπτωση αυτή ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής υπολογίζεται από το όριο της σχέσης (1) για $h \to 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \qquad (2)$$

Υπό την προϋπόθεση ότι το παραπάνω όριο υπάρχει.
Η σχέση (2) όμως δίνει την παράγωγο της συνάρτησης $y = f(x)$ στο σημείο x_o. Έτσι μπορούμε να καταλήξουμε στο παρακάτω συμπέρασμα.

**** Ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής σε ένα σημείο x_o της συνάρτησης y=f(x), εκφράζει την παράγωγο της συνάρτησης στο σημείο αυτό.***

$$\frac{dy}{dx} = f'(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \qquad (3)$$



Σχήμα 2

• ΧΡΟΝΙΚΟΙ ΡΥΘΜΟΙ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Οι χρονικοί ρυθμοί μεταβολής έχουν σαν ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο t. Αυτοί συναντώνται κυρίως στη φυσική.
Πολλές φορές ένας χρονικός ρυθμός μεταβολής ενός φυσικού μεγέθους, παριστάνει κάποιο άλλο φυσικό μέγεθος.
Στην περίπτωση αυτή υπολογίζουμε το δεύτερο μέγεθος την χρονική στιγμή που θέλουμε και βρίσκουμε το ρυθμό μεταβολής του πρώτου.

Παράδειγμα 1

Ένα σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στον προσανατολισμένο άξονα Ox. Η εξίσωση που δίνει τη μετατόπιση του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο είναι $x = 4t^2$ (S.I.).
α) Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του σώματος από τη χρονική στιγμή $t_1 = 2s$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 4s$.
β) Να υπολογίσετε τη στιγμιαία ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 4s$.

Λύση

α) Η μέση ταχύτητα του σώματος εκφράζει το μέσο ρυθμό μεταβολής της μετατόπισης.

$$\upsilon_\mu = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{4 \cdot 4^2 - 4 \cdot 2^2}{4 - 2} = \frac{64 - 16}{2} = \frac{48}{2} = 24\,m/s$$

β) Η στιγμιαία ταχύτητα εκφράζει το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της μετατόπισης και θα υπολογιστεί από την παράγωγο της μετατόπισης στη χρονική στιγμή $t_2 = 4s$.

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = x' = 8t \xrightarrow{t=4s} \upsilon = 32\,m/s$$

Παράδειγμα 2

Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης $x = 0{,}1\eta\mu 10t$ (S.I.). Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της απομάκρυνσης τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{40}s$.

Λύση

Ο ρυθμός μεταβολής της απομάκρυνσης είναι η ταχύτητα η οποία έχει εξίσωση.

$$\upsilon = A \cdot \omega\,\sigma\upsilon\nu 10t \Rightarrow \upsilon = 1\sigma\upsilon\nu 10t$$

Άρα.

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon = 1\sigma\upsilon\nu 10\frac{\pi}{40} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,m/s$$

- **ΒΑΣΙΚΟΙ ΡΥΘΜΟΙ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ**

1. Ρυθμός μεταβολής της μετατόπισης.

Εκφράζει την ταχύτητα του σώματος κάθε χρονική στιγμή $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{\upsilon}$.

2. Ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας.

Εκφράζει την επιτάχυνση του σώματος κάθε χρονική στιγμή $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{\alpha}$.

3. Ρυθμός μεταβολής της ορμής.

Εκφράζει την συνολική δύναμη που ασκείται στο σώμα κάθε χρονική στιγμή $\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma\vec{F}$.

4. Ρυθμός μεταβολής έργου - ενέργειας (οποιασδήποτε ενέργειας).

Εκφράζει την ισχύ κάθε χρονική στιγμή $\frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt} = P$.

Ειδικότερα.

✓ Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι.

Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) παίρνουμε.

$$\Sigma W = \Delta K \Rightarrow \frac{\Sigma W}{\Delta t} = \frac{\Delta K}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \frac{dK}{dt} = P_{\Sigma F} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon$$

✓ Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας σε μια αμείωτη απλή αρμονική ταλάντωση είναι αντίθετος με το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

Από τη διατήρηση της ενέργειας στην ταλάντωση παίρνουμε.

$$K + U = E \Rightarrow U = E - K \Rightarrow dU = dE - dK \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{dE}{dt} - \frac{dK}{dt} \xrightarrow{\frac{dE}{dt}=0} \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt}$$

✓ Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας σε ένα σώμα που κινείται μόνο με την επίδραση του βάρους του (κατακόρυφα) είναι.

$$\frac{dU}{dt} = P_w = \pm w \cdot \upsilon = \pm mg\upsilon$$

Το (+) όταν το σώμα ανέρχεται (η δυναμική του ενέργεια αυξάνεται).
Το (-) όταν το σώμα κατέρχεται (η δυναμική του ενέργεια μειώνεται).

✓Ο ρυθμός μεταβολής της ηλεκτρικής ενέργειας σε ένα ηλεκτρικό στοιχείο ενός κυκλώματος είναι.

$$\frac{dE}{dt} = P \Rightarrow \frac{dE}{dt} = i \cdot V$$

Όπου i η ένταση του ρεύματος και V η τάση στα άκρα του στοιχείου.

5. Ρυθμός μεταβολής του ηλεκτρικού φορτίου.

Εκφράζει την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος κάθε χρονική στιγμή $\frac{dq}{dt} = i$.

Υπάρχουν και ρυθμοί μεταβολής που δεν παριστάνουν κάποιο φυσικό μέγεθος και υπολογίζονται με συνθετικές μεθόδους.

6. Ρυθμός μεταβολής της τάσης του πυκνωτή στο κύκλωμα LC.

$$V = \frac{q}{C} \Rightarrow dV = \frac{dq}{C} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{i}{C} \qquad \text{αφού} \quad \frac{dq}{dt} = i$$

7. Ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα LC.

$$V_L = V_C \Rightarrow -L\frac{di}{dt} = \frac{q}{C} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{q}{LC}$$