ΚΙΝΗΣΗ ΣΩΜΑΤΟΣ σε ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ και ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Για μαθητές από την Α' μέχρι και τη Γ' Λυκείου

Γ. Ατρείδης: Δρ. Αστροσωματιδιακής Φυσικής

Στο τεύχος αυτό θα ασχοληθούμε με προβλήματα που αναφέρονται στην κίνηση σώματος πάνω σε οριζόντιο ή κεκλιμένο επίπεδο. Τα προβλήματα αυτά είναι πολύ σημαντικά επειδή συνδυάζουν τη δυναμική και την κινητική της Α' λυκείου, μπορούν όμως να λυθούν και με τη θεωρία των ενεργειών.

Α' τρόπος

(Μελέτη με εξισώσεις δυναμικής και κινητικής)

Στις περισσότερες των περιπτώσεων το κλειδί της άσκησης είναι ο υπολογισμός της επιτάχυνσης (ή επιβράδυνσης) κατά την κίνηση του σώματος.

Θα ξεκινήσουμε με τον υπολογισμό της επιτάχυνσης για ένα σώμα το οποίο κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση μιας οριζόντιας δύναμης F και της τριβής.

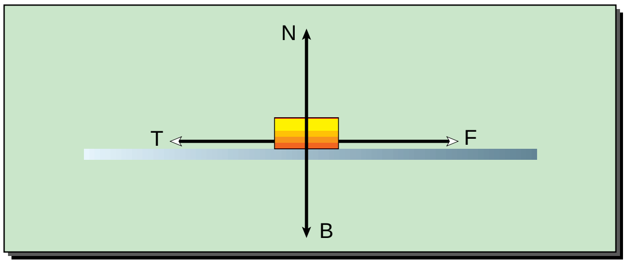
Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε ως εξής:

- Εκλέγουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Ο ένας άξονας βρίσκεται πάνω στη διεύθυνση της κίνησης και ο άλλος κάθετος στον προηγούμενο.
- Στον άξονα ο οποίος είναι κάθετος στην κίνηση η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν. Από τη συνθήκη αυτή υπολογίζουμε την κάθετη αντίδραση (N).
- Υπολογίζουμε την τριβή από το νόμο της τριβής $T = nN$.
- Αφού το σώμα κινείται επιταχυνόμενο, από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι η συνισταμένη των δυνάμεων στον άξονα αυτό είναι ίση με το γινόμενο $m\gamma$.
- Υπολογίζοντας με τον τρόπο αυτό την επιτάχυνση μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε στις εξισώσεις της κινητικής για να βρούμε αυτά που μας ζητάει το πρόβλημα.

☞ ΠΡΟΣΕΞΕ: Αν το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, τότε και στον άξονα της κίνησης η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν.

* Αναφέρεται στην τριβή ολίσθησης

Ας επεξεργαστούμε μαθηματικά το παραπάνω πρόβλημα.



Η κίνηση γίνεται στον οριζόντιο άξονα. Εκλέγουμε έναν οριζόντιο και ένα κατακόρυφο άξονα. Στον κατακόρυφο άξονα έχουμε

$\Sigma F_\psi = 0 \qquad N - B = 0 \qquad N = B \qquad N = mg.$

Από το νόμο της τριβής έχουμε: $T = nN = nmg$*.

Για να κινηθεί το σώμα επιταχυνόμενο θα πρέπει $F > T$.

Στον οριζόντιο άξονα έχουμε :

$$\Sigma F_x = m\gamma \qquad F - T = m\gamma \qquad \gamma = \frac{F-T}{m}.$$

Κάνοντας αντικατάσταση την τριβή παίρνουμε:

$$\gamma = \frac{F - nmg}{m}.$$

Πρόβλημα

Σώμα το οποίο έχει μάζα $m=4$ kgr ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται δύναμη $F=20$ N η οποία σχηματίζει γωνία $\varphi=30^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο για χρόνο $t_1=5$ sec. Ο συντελεστής τριβής του σώματος με το επίπεδο είναι $n=0{,}15$. Να βρείτε πόσο διάστημα θα έχει διανύσει το σώμα μέχρι να σταματήσει. Δίνεται $g=10$ m/sec^2.

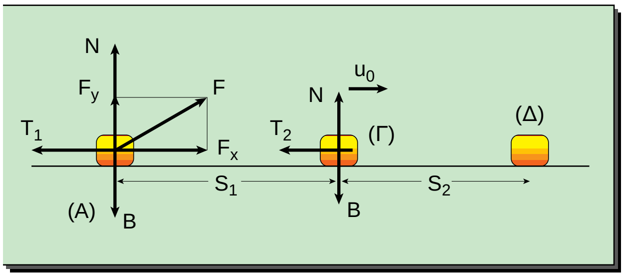
Λύση

Στο παραπάνω πρόβλημα το σώμα εκτελεί δύο κινήσεις. Στο χρόνο t_1 που θα επιδρά πάνω του η δύναμη F θα επιταχύνεται με την επίδραση της συνισταμένης $F_x – T_1$. Στη συνέχεια αυτό θα επιβραδύνεται υπό την επίδραση της T_2.

Για την επιταχυνόμενη κίνηση έχουμε

$$\Sigma F_\psi = 0 \qquad N + F_\psi - B = 0 \qquad N = B - F_\psi \qquad (1)$$

$$\Sigma F_x = m\gamma \qquad F_x – T_1 = m\gamma \qquad (2)$$



Για τις συνιστώσες F_x και F_ψ έχουμε:

$$F_x = F\text{συν}30^\circ = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\,N \qquad (3)$$

και

$$F_\psi = F\text{ημ}30^\circ = 20\,\frac{1}{2} = 10\text{ N}. \qquad (4)$$

Από τις (1) και (4) έχουμε:

$$N = B - F_\psi = mg - F_\psi = 40 - 10 = 30\text{ N} \text{ και}$$

$$T_1 = nN = 0{,}15\cdot 30 = 4{,}5\text{ N}$$

Από την (2) παίρνουμε:

$$\gamma_1 = \frac{F_x – T_1}{m} \qquad \gamma_1 = \frac{10\sqrt{3} – 4{,}5}{4} = 3{,}2\text{ m/sec}^2$$

Το διάστημα στην επιταχυνόμενη κίνηση θα είναι:

$$S_1 = \frac{1}{2}\gamma_1 t_1^2 \qquad S_1 = 40\text{ m}.$$

Η ταχύτητα την οποία θα αποκτήσει το σώμα είναι:

$$u_0 = \gamma_1 t_1 = 3{,}2\cdot 5 = 16\text{m/sec}.$$

Για την επιβραδυνόμενη κίνηση έχουμε:

$$\Sigma F_\psi = 0 \qquad N - B = 0 \qquad N = B$$

$$\Sigma F_x = m\gamma_2 \qquad –T_2 = m\gamma_2 \qquad \gamma_2 = -\frac{T_2}{m} \qquad (5)$$

και $\qquad T_2 = nN = nB = nmg = 6N \qquad (6)$

Από τις (5) και (6) έχουμε: $\gamma_2 = –1{,}5\text{ m/sec}^2$.

Ο χρόνος που χρειάζεται για να σταματήσει το σώμα βρίσκεται ως εξής.

Όταν σταματάει το σώμα η τελική ταχύτητά του είναι μηδέν.

$$u = u_0 - \gamma_2 t_2 \qquad 0 = u_0 – \gamma_2 t_2 \qquad \gamma_2 t_2 = u_0$$

$$t_2 = \frac{u_0}{\gamma_2} \qquad t_2 = \frac{16}{1{,}5} = 10{,}66\text{ sec}$$

και το S_2 θα είναι:

$$S_2 = u_0 t_2 - \frac{1}{2}\gamma_2 t^2 = 16\cdot 10{,}66 - \frac{1}{2}\cdot 1{,}5\cdot 10{,}66^2 =$$

$$= 170{,}66 – 85{,}2267 = 85{,}33\text{ m}$$

και $\qquad S = S_1 + S_2 = 145{,}33\text{ m}.$

Β' τρόπος

(Ενεργειακά)

Αφού έχουμε βρει την ταχύτητα στο σημείο (Γ) χρησιμοποιούμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ) για την κίνηση του σώματος από το (Α) στο (Γ).

$$E^0_{x(A)} + W_F + W_{T_1} = E_{x(\Gamma)}$$

$$F\cdot S_1\text{συν}30^\circ – T_1 S_1 = \frac{1}{2}mu_0^2$$

$$20S_1\frac{\sqrt{3}}{2} - 4{,}5S_1 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 16^2$$

$$10\sqrt{3}S_1 - 4{,}5S_1 = 512 \qquad S_1 = 40\text{ m}$$

και με ΘΜΚΕ από το (Γ) μέχρι το (Δ) βρίσκουμε το S_2.

$$E_{x(\Gamma)} + W_{T2} = E_{x(\Delta)} \qquad \frac{1}{2}mu_0^2 - T_2 S_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 16^2 = 6\cdot S_2 \qquad 512 = 6\cdot S_2$$

$$S_2 = 85{,}33\text{ m}$$

και $\qquad S = S_1 + S_2 = 145{,}33\text{ m}.$

• Κίνηση σε κεκλιμένο επίπεδο

Στο κεκλιμένο επίπεδο συνήθως ξεκινάμε με τις παρακάτω ενέργειες:

- Εκλέγουμε δυο άξονες. Ένα παράλληλο με το κεκλιμένο επίπεδο και ένα κάθετο σ' αυτόν.
- Αναλύουμε όλες τις δυνάμεις που υπάρχουν πάνω στους άξονες αυτούς (όσες χρειάζονται ανάλυση).
- Στον άξονα ψ παίρνουμε $\Sigma F_\psi = 0$ και υπολογίζουμε την αντίδραση N.
- Βρίσκουμε την τριβή από το νόμο $T = nN$.
- Αν το σώμα κινείται επιταχυνόμενο στον άξονα x παίρνουμε $\Sigma F_x = m\gamma$ και υπολογίζουμε την επιτάχυνση γ.
- Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις της κινητικής για να υπολογίσουμε τα μεγέθη που ζητάει το πρόβλημα.

☞ ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν στον άξονα x η κίνηση είναι ομαλή, ισχύει και σ' αυτόν $\Sigma F_x = 0$.

Πρόβλημα

Ένα σώμα βάλλεται προς τα πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 10$ m/sec. Ο συντελεστής τριβής του σώματος με το επίπεδο είναι $n = 0{,}1$ και η κλίση του κεκλιμένου επιπέδου $\varphi = 30^\circ$. Να βρεθεί το διάστημα που θα διανύσει το σώμα μέχρι να σταματήσει.

Λύση

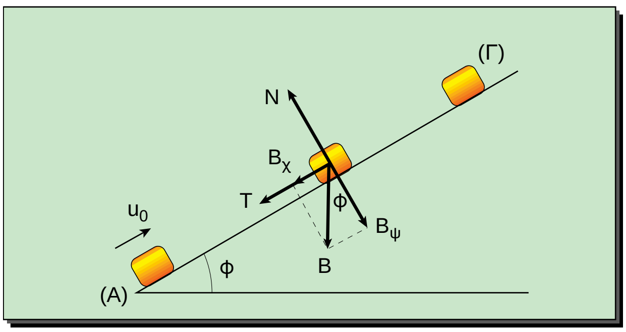
Α' τρόπος

Από το ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε για τις συνιστώσες του βάρους:

$$B_x = mg\eta\mu\varphi \quad \text{και} \quad B_\psi = mg\sigma\upsilon\nu\varphi.$$

Στον άξονα των ψ έχουμε:

$$\Sigma F_\psi = 0 \qquad N - B_\psi = 0 \qquad N = B_\psi = mg\sigma\upsilon\nu\varphi.$$



Από το νόμο της τριβής έχουμε:

$$T = nN = nmg\sigma\upsilon\nu\varphi.$$

Στον άξονα των x έχουμε

$$\Sigma F_x = m\gamma \qquad -B_x - T = m\gamma$$

$$-mg\eta\mu\varphi - nmg\sigma\upsilon\nu\varphi = m\gamma.$$

Και $\gamma = -g\eta\mu\varphi - ng\sigma\upsilon\nu\varphi = -5{,}866$ m/sec^2.

Από τη σχέση που μας δίνει το ολικό διάστημα στην επιβραδυνόμενη κίνηση έχουμε:

$$S = \frac{\upsilon_0^2}{2\gamma} = 8{,}52\text{m}.$$

• *Μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και τις γενικές σχέσεις της επιβραδυνόμενης κίνησης.*

$$\upsilon = \upsilon_0 - \gamma t \quad \text{και} \quad S = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2$$

βρίσκοντας από την πρώτη το χρόνο και από τη δεύτερη το διάστημα.

Β' τρόπος

Χρησιμοποιώντας θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τις θέσεις (Α) και (Γ) παίρνουμε:

$$E_{\kappa(A)} + W_{B_x} + W_T = E_{\kappa(\Gamma)}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - B_x \cdot S - T \cdot S = 0$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - mg\eta\mu\varphi S - nmg\sigma\upsilon\nu\varphi S = 0$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = mgS(\eta\mu\varphi + n\sigma\upsilon\nu\varphi)$$

$$S = \frac{\upsilon_0^2}{2g(\eta\mu\varphi + n\sigma\upsilon\nu\varphi)} =$$

$$= \frac{10^2}{2 \cdot 10\left(\frac{1}{2} + 0{,}1\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 8{,}52 \text{ m}.$$

◆