Ο ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΦΥΣΙΚΗ ΛΥΚΕΙΟΥ

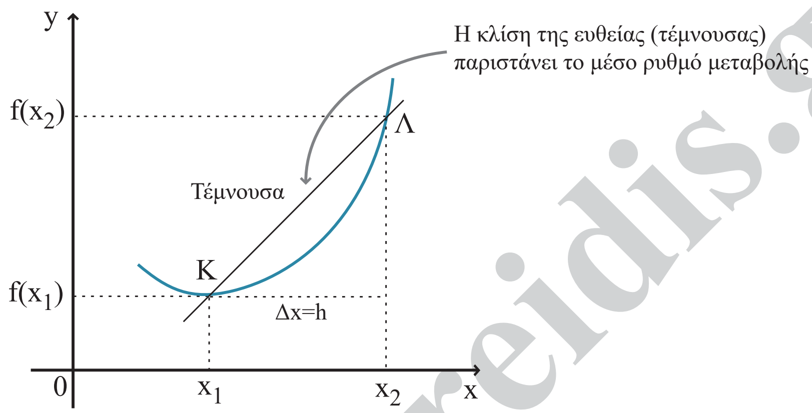
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΑΤΡΕΙΔΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ

ΜΕΣΟΣ ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση y=f(x) η γραφική παράσταση της οποίας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 1.
Στη συνάρτηση αυτή ο μέσος ρυθμός μεταβολής του y ως προς το x για ένα διάστημα $[x_1, x_2]$ εκφράζει το πηλίκο της μεταβολής Δy προς τη μεταβολή Δx και υπολογίζεται ως εξής.

$$\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \xrightarrow{x_2-x_1=h} \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{h} \quad \text{όπου} \quad h\neq 0 \quad (1)$$

Από τα σημεία Κ και Λ διέρχεται μια τέμνουσα της γραφικής παράστασης C_f. Η κλίση της τέμνουσας αυτής ισούται με τον μέσο ρυθμό μεταβολής Δy/Δx της f στο διάστημα $[x_1, x_2]$, που ορίσαμε παραπάνω.



Σχήμα 1

***Άρα από γεωμετρική άποψη, ο μέσος ρυθμός μεταβολής είναι η κλίση (ή ο συντελεστής διεύθυνσης) μιας τέμνουσας ευθείας.**

ΣΤΙΓΜΙΑΙΟΣ ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

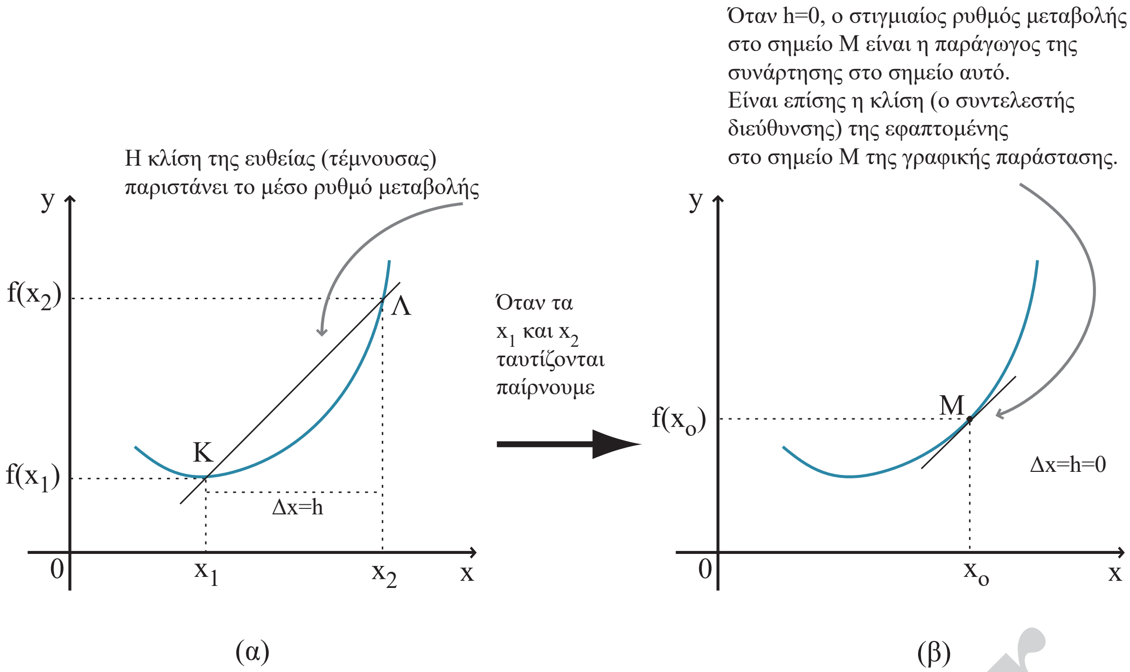
Έστω ότι στην προηγούμενη γραφική παράσταση τα x_1 και x_2 πλησιάζουν το ένα προς το άλλο και σε κάποιο σημείο ταυτίζονται $x_1=x_2=x_o$ (σχήμα 2). Τότε το μήκος Δx τείνει στο μηδέν $\Delta x=x_2-x_1=h=0$.
Στην περίπτωση αυτή ο ρυθμός μεταβολής ονομάζεται στιγμιαίος και δεν μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση (1) αφού το κλάσμα δίνει 0/0.
Ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής υπολογίζεται από το όριο της σχέσης (1) για $h\rightarrow 0$.

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \quad (2)$$

Υπό την προϋπόθεση ότι το παραπάνω όριο υπάρχει.
Η σχέση (2) όμως δίνει την παράγωγο της συνάρτησης y=f(x) στο σημείο x_o. Έτσι μπορούμε να καταλήξουμε στο παρακάτω συμπέρασμα.

**** Ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής σε ένα σημείο x_o της συνάρτησης y=f(x), εκφράζει την παράγωγο της συνάρτησης στο σημείο αυτό.***

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=f'(x_o)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \quad (3)$$



Σχήμα 2

ΧΡΟΝΙΚΟΣ ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

- Ο χρονικός ρυθμός μεταβολής έχει σαν ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο t. Αυτός συναντάται κυρίως στη φυσική.
- Πολλές φορές ένας χρονικός ρυθμός μεταβολής ενός φυσικού μεγέθους, παριστάνει κάποιο άλλο φυσικό μέγεθος.
- Στην περίπτωση αυτή υπολογίζουμε το δεύτερο μέγεθος την χρονική στιγμή που θέλουμε και βρίσκουμε το ρυθμό μεταβολής του πρώτου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ένα σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στον προσανατολισμένο άξονα Ox. Η εξίσωση που δίνει τη μετατόπιση του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο είναι $x=4t^2$ (S.I.).
α) Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του σώματος από τη χρονική στιγμή $t_1=2s$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2=4s$.
β) Να υπολογίσετε τη στιγμιαία ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_2=4s$.

Λύση

α) Η μέση ταχύτητα του σώματος εκφράζει το μέσο ρυθμό μεταβολής της μετατόπισης.

$$\upsilon_\mu = \frac{\Delta \mathrm{x}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{4\cdot 4^2 - 4\cdot 2^2}{4-2} = \frac{64-16}{2} = \frac{48}{2} = 24\,m/s$$

β) Η στιγμιαία ταχύτητα εκφράζει το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της μετατόπισης και θα υπολογιστεί από την παράγωγο της μετατόπισης στη χρονική στιγμή $t_2=4s$.

$$\upsilon = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = x' = 8t \xrightarrow{t=4\,s} \upsilon = 32\,\mathrm{m/s}$$

Μπορούμε να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με τις εξισώσεις της κίνησης.
Συγκρίνοντας τις σχέσεις της μετατόπισης παίρνουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x = 4t^2 \\ x = \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{array}\right\} \alpha = 8m/s^2$$

Και η στιγμιαία ταχύτητα είναι:

$$\upsilon = \alpha t_2 = 8\cdot 4 = 32m/s$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2
Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης x=0,1ημ10t (S.I.). Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της απομάκρυνσης τη χρονική στιγμή $t_1=\pi/40$s.

Λύση

Ο ρυθμός μεταβολής της απομάκρυνσης είναι η ταχύτητα η οποία έχει εξίσωση:

$$\upsilon = A \cdot \omega\, \sigma\upsilon\nu 10\mathrm{t} \Rightarrow \upsilon = 1\, \sigma\upsilon\nu\, 10\mathrm{t}$$

Άρα:

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \upsilon = 1\, \sigma\upsilon\nu\, 10\frac{\pi}{40} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, m/s$$

ΒΑΣΙΚΟΙ ΡΥΘΜΟΙ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

- ***Ρυθμός μεταβολής της μετατόπισης.***

Εκφράζει την ταχύτητα του σώματος κάθε χρονική στιγμή.

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon$$

- ***Ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας.***

Εκφράζει την επιτάχυνση του σώματος κάθε χρονική στιγμή.

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \alpha$$

- ***Ρυθμός μεταβολής της γωνίας σε μια καμπυλόγραμμη κίνηση.***

Εκφράζει την γωνιακή ταχύτητα του σώματος κάθε χρονική στιγμή.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

- ***Ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας σε μια καμπυλόγραμμη κίνηση.***

Εκφράζει την γωνιακή επιτάχυνση του σώματος κάθε χρονική στιγμή.

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

- ***Ρυθμός μεταβολής της ορμής.***

Εκφράζει την συνολική δύναμη που ασκείται στο σώμα κάθε χρονική στιγμή.

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma\mathrm{F}$$

- ***Ρυθμός μεταβολής έργου - ενέργειας (οποιασδήποτε ενέργειας).***

Εκφράζει την ισχύ κάθε χρονική στιγμή.

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt} = \mathrm{P}$$

- ***Ρυθμός με τον οποίο μια δύναμη F μεταβάλλει την ενέργεια ενός συστήματος.***

Εκφράζει την ισχύ της δύναμης.

$$\frac{dW_F}{dt} = P_{\mathrm{F}} = \mathrm{F} \cdot \upsilon$$

Με τη δύναμη και την ταχύτητα να βρίσκονται στην ίδια διεύθυνση.

Ειδικότερα.
✓ Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι.
Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) παίρνουμε:

$$\Sigma W = \Delta K \Rightarrow \frac{\Sigma W}{\Delta t} = \frac{\Delta K}{\Delta t} \quad \text{για } \Delta t\text{=0 παίρνουμε} \quad \frac{dK}{dt} = P_{\Sigma F} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon$$

✓ Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας σε μια αμείωτη απλή αρμονική ταλάντωση είναι αντίθετος με το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας.
Από τη διατήρηση της ενέργειας στην ταλάντωση παίρνουμε:

$$K + U = E \Rightarrow U = E - K \Rightarrow dU = dE - dK \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{dE}{dt} - \frac{dK}{dt} \xrightarrow{\frac{dE}{dt}=0} \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt}$$

✓ Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας σε ένα σώμα που κινείται μόνο με την επίδραση του βάρους του (κατακόρυφα) είναι:

$$\frac{dU}{dt} = P_w = \pm w \cdot \upsilon = \pm \mathrm{mg}\upsilon$$

ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

- ***Ρυθμός μεταβολής του ηλεκτρικού φορτίου.***

Εκφράζει την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος κάθε χρονική στιγμή.

$$\frac{dq}{dt} = i$$

- ***Ρυθμός μεταβολής της ηλεκτρικής ενέργειας σε ένα ηλεκτρικό στοιχείο ενός κυκλώματος.***

Εκφράζει την ισχύ του ηλεκτρικού στοιχείου.

$$\frac{dE}{dt} = P \Rightarrow \frac{dE}{dt} = i \cdot V$$

Όπου V η τάση στα άκρα του στοιχείου.

Αν πρόκειται για ωμική αντίσταση, ο ρυθμός μεταβολής δίνεται και από τη σχέση:

$$\frac{dE}{dt} = P \Rightarrow \frac{dE}{dt} = i^2 \cdot R = \frac{V^2}{R}$$

- ***Ρυθμός με τον οποίο προσφέρει ενέργεια μια ηλεκτρική πηγή με ΗΕΔ Ε σε ένα κύκλωμα.***

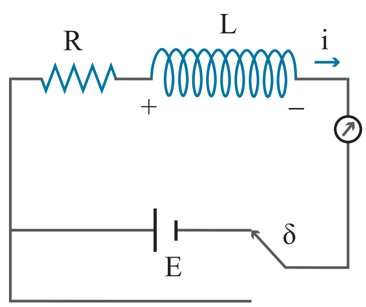
Εκφράζει την ισχύ της πηγής.

$$\frac{dW_E}{dt} = P_E = E \cdot i$$

Όπου i η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει την πηγή.

Υπάρχουν και ρυθμοί μεταβολής που δεν παριστάνουν κάποιο φυσικό μέγεθος και υπολογίζονται με συνθετικές μεθόδους.

- ***Ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος σε κύκλωμα με αυτεπαγωγή (κλείσιμο διακόπτη).***



$$E - iR - L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{E - iR}{L}$$

- ***Ρυθμός μεταβολής της τάσης του πηνίου (κλείσιμο διακόπτη).***

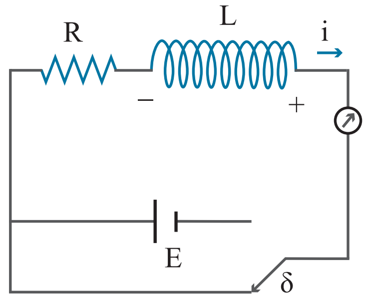
$$E - iR - V_L = 0 \Rightarrow V_L = E - iR \Rightarrow dV_L = -Rdi \Rightarrow \frac{dV_L}{dt} = -R\frac{di}{dt} = -R\frac{E - iR}{L}$$

- ***Ρυθμός με τον οποίο αποθηκεύεται ενέργεια στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου (κλείσιμο διακόπτη).***

$$P_E = P_R + P_L \Rightarrow P_L = P_E - P_R \Rightarrow \frac{dW_L}{dt} = Ei - i^2R$$

$$\text{ή} \quad \frac{dW_L}{dt} = V_L i$$

- ***Ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος σε κύκλωμα με αυτεπαγωγή (άνοιγμα διακόπτη).***



$$L\frac{di}{dt} - iR = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{iR}{L}$$

- ***Ρυθμός μεταβολής της τάσης του πηνίου (άνοιγμα διακόπτη).***

$$V_L - iR = 0 \Rightarrow V_L = iR \Rightarrow dV_L = Rdi \Rightarrow \frac{dV_L}{dt} = R\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{dV_L}{dt} = \frac{iR^2}{L}$$

- ***Ρυθμός μείωσης της ενέργειας του πηνίου (άνοιγμα διακόπτη).***

$$P_L = P_R \Rightarrow \frac{dW_L}{dt} = i^2R$$

$$\text{ή} \quad \frac{dW_L}{dt} = V_L i$$

- ***Ρυθμός μεταβολής της τάσης του πυκνωτή στο κύκλωμα LC.***

$$V = \frac{q}{C} \Rightarrow dV = \frac{dq}{C} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{i}{C} \quad \text{αφού} \quad \frac{dq}{dt} = i$$

- ***Ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα LC.***

$$V_L = V_C \Rightarrow -L\frac{di}{dt} = \frac{q}{C} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{q}{LC}$$